



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

11. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 4

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Volumina folgender Mengen:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ hat eine Dezimaldarstellung ohne die Ziffer } 0.\}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Integrale auf der offenen Kreisscheibe $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}$

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} d(x, y) \quad \int_K \sqrt{1-y^2} d(x, y)$$

Aufgabe 3: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $A \subseteq U$ und $v(U) < v(A) + \varepsilon$.

Aufgabe 4: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar. Zeigen Sie, dass:

$$v(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) \mid (Q_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge von Quadern mit } A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \right\}$$



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

11. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 4

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}v(A) &= \int_0^1 v(A_y) dy = \int_0^1 v([0, y]) dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \\v(B) &= \int_0^1 v(B_z) dz = \int_0^1 \int_0^z v([0, y]) dy dz = \int_0^1 \int_0^z y dy dz = \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich noch, dass $v(C) = 0$ ist. Sei hierzu C_n für $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller x , deren nicht abbrechende Dezimaldarstellung an den ersten n Nachkommastellen keine 0 hat. Dann ist offenbar $C \subseteq C_n$, also $v(C) \leq v(C_n)$, und es genügt zu zeigen, dass $\inf_n v(C_n) = 0$ ist. Die Zahlen, deren erste n Nachkommastellen übereinstimmen, bilden jeweils ein Intervall der Länge 10^{-n} . Bei 9^n dieser Intervalle kommt in den ersten n Ziffern keine 0 vor. Es ist also $v(C_n) = 9^n \cdot 10^{-n} = 0,9^n$. Dies konvergiert gegen 0.

(Beachte, dass die Zahlen, deren Dezimaldarstellung nicht eindeutig ist, irrelevant sind, da sie alle rational sind und $v(\mathbb{Q}) = 0$ ist.)

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 2 dy = 4 \\ \int_K \sqrt{1-y^2} d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]} \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy \\ &= 2 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Sei φ eine Hüllreihe von $2 \cdot \mathbf{1}_A$ mit $I(\varphi) < 2v(A) + \varepsilon$. Dann ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$$

(nach Blatt 1, Aufgabe 4) eine offene Obermenge von A und es gilt $\varphi \geq \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_A$, also $2v(A) + \varepsilon > I(\varphi) \geq v(U) + v(A)$. Daraus folgt $v(U) < v(A) + \varepsilon$.

Aufgabe 4: Sind die Q_k Quader, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ konvergiert, dann konvergiert die monoton wachsende Folge der Treppenfunktionen $\sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{Q_k}$ von unten gegen $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{Q_k}$, also ist nach dem kleinen Satz von Levi f integrierbar mit Integral $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$. Ist nun $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$, so ist $\mathbf{1}_A \leq f$, also ist $v(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ und damit $v(A)$ höchstens gleich dem angegebenen Infimum.

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein U wie in Aufgabe 3. Dann gibt es Quader $Q_0, Q_1, \dots \subset \mathbb{R}^n$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und deren Vereinigung U ist. Für alle $k \neq l$ ist also $Q_k \cap Q_l$ eine Nullmenge. Daher ist

$$\sum_{k=0}^N v(Q_k) = \int \sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{Q_k} dx \leq \int \mathbf{1}_U dx + \int \sum_{k < l \leq N} \infty \cdot \mathbf{1}_{Q_k \cap Q_l} dx = v(U)$$

und somit auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) \leq v(U) < v(A) + \varepsilon$$

Also ist $v(A)$ auch mindestens das Infimum.